LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Microeconomia I
2019

Ficha 5: Capítulos 21, 22, 23 e 24

Exercícios propostos

Capítulo 21, Minimização do Custo

5.1. Considere a função de produção $f(l, k) = 4l^{1/4}k^{1/4}$.

a) Obtenha as funções de procura condicionada de factores. Que tipo de informação económica nos dão estas funções?
b) Obtenha a função custo e interprete-a.
c) Qual é o significado económico do valor 4 (quatro), nesta função de produção?

5.2. Uma empresa tem a função de produção $f(l, k) = Al^{1/2}k^{1/6}$, onde l representa o número de horas de trabalho, k representa o número de unidades de capital e A é uma constante positiva.

a) Determine as funções de procura condicionadas dos dois factores produtivos.
b) Sabendo que o preço do trabalho é w = €6 por hora e o preço do capital é r = €2 por unidade, determine A para que o custo total de produzir uma unidade de output seja de €80. Qual é o significado económico da constante A?

5.3. Uma empresa opera com uma tecnologia descrita pela função de produção $f(l, k) = l^{0.5}k^{0.75}$, onde l representa a quantidade do factor trabalho e k representa a quantidade do factor capital. O capital é um factor fixo no curto prazo.

a) Esta tecnologia apresenta a lei dos rendimentos marginais decrescentes? Que tipo de rendimentos de escala apresenta esta tecnologia?
b) A empresa emprega presentemente 4 unidades de capital. Os preços unitários de trabalho e capital são respetivamente $w_l = 2$ e $w_k = 25$. Obtenha o custo em função da quantidade produzida y. Qual é a quantidade produzida que minimiza o custo médio e o custo variável médio?
c) Sem cálculos: qual é forma genérica da curva de custo médio de curto prazo? (Crescente, decrescente, em forma de U, etc..)
d) Obtenha as funções de procura condicionada dos factores e a função de custo de longo prazo. Obtenha a curva de custo médio para os preços da alínea anterior (o custo fica só em função de y).
e) Represente graficamente no mesmo gráfico as curvas de custo médio de curto prazo com k = 4 (alínea b)) e a de longo prazo da alínea d). Para que valores de y são os dois custos médios iguais, e para que valores é um superior ao outro? Qual é a razão dessa relação?

5.4. Determine a função de custo $c(w_1, w_2, y)$ correspondente às seguintes tecnologias:

a) $f(l, k) = \min\{2l, 3k\}$;
b) $f(l, k) = 2l + 3k$;
c) $f(l, k) = \max\{2l, 3k\}$.

5.5. O custo de produção depende da procura do produto produzido? Explique.

5.6. Considere uma empresa que produz apenas um produto a partir de dois factores, capital e trabalho. Os preços dos factores são, respectivamente, w e r; l e k são as quantidades de trabalho e capital, respectivamente. A função de produção é a seguinte:

$$f(l, k) = l^{\alpha} k^{\beta}$$

a) Calcule a função de custo médios no longo prazo.
b) Comente a seguinte afirmação: "Os custos aumentam mais (menos) que proporcionalmente com a quantidade de produção quando $\alpha + \beta < 1$ ($\alpha + \beta > 1$)".

Capítulo 22, Curvas de Custo

5.7. Diga qual ou quais das afirmações seguintes são verdadeiras e explique porquê.

a) Os custos fixos médios nunca aumentam com o produto.
b) Os custos médios são sempre maiores ou iguais do que os custos variáveis médios.
c) O custo médio nunca pode aumentar quando o custo marginal é decrescente.

5.8. Uma adega cooperativa encontra no mercado apenas duas linhas de engarrafamento de vinho: a pequena e a grande. Se instalar a pequena, a sua curva de custos totais será:

$$c_s^p(y) = y^3 - 10y^2 + 35y$$

e, se instalar a grande, a sua curva de custos totais será:

$$c_s^g(y) = y^3 - 20y^2 + 108y,$$

onde y é a quantidade de vinho engarrafada.

a) Considerando que o único factor fixo no curto prazo é a linha de engarrafamento, obtenha analiticamente a curva de custo total de longo prazo e represente graficamente as curvas de custo total médio de curto prazo e de longo prazo.
b) Estude os rendimentos à escala desta adega cooperativa.

5.9. Uma empresa num mercado de concorrência perfeita tem a seguinte função de custo de curto prazo $c_s(y) = y^3 - 2y^2 + 5y + 6$.

a) Determine a função de custos variáveis da empresa.
b) Determine a função do custo marginal da empresa.

5.10. Para cada uma das situações seguintes, determine as funções de custo de curto e longo prazo. Explique todo o seu raciocínio usando os conceitos teóricos adequados.

a) $f(l, k) = l^{0,5} k^{0,5}$; $r = 1$; $w = 4$; $k = 2$.
b) $f(l,k) = 4k + 2l$; $r = 5$; $w = 4$; $k = 2$.
c) $f(l,k) = \min\{2k, 3l\}$; $r = 8$; $w = 12$; $k = 9$.

5.11. Considere uma empresa que produz o output y com uma tecnologia que gera a função de custos totais de produção $c(y) = 2 + 15y - 6y^2 + y^3$.

a) Esta função de custos é característica do curto ou do longo prazo? Explique, usando a definição de curto prazo e de longo prazo.
b) Determine as expressões genéricas das funções de custos médios e marginal da empresa e represente-as em gráficos adequados.
c) Calcule o volume de produção para o qual a empresa consegue o custo variável médio mais baixo.

d) Explique, usando o gráfico da alínea b), porque é que a curva de custo marginal intersecta as curvas de custo total médio e custo variável médio nos respectivos pontos mínimos.

5.12. Considere a função de produção: $f(l, k) = 2\sqrt{kl}$ e os preços unitários dos factores trabalho e capital de €9 e de €4, respectivamente.

a) Calcule as quantidades óptimas de factores que o empresário deverá utilizar para produzir um volume de produção de 100 unidades de produto e o respectivo custo. Interprete economicamente este custo.
b) Se o empresário só puder gastar €504 na compra de factores de produção, determine a quantidade de factores que pode ser adquirida e o respectivo volume de produção.
c) Determine a função custo total de longo prazo e explique o respectivo significado económico.
d) Que tipo de rendimentos à escala tem a função de produção? Explique que influência tem os rendimentos à escala da função de produção sobre a função de custo total de longo prazo que determinou na alínea c).
e) Suponha que o empresário vai usar a quantidade k= 64 u.f. de factor capital. Determine a função custo total de curto prazo e explique o seu significado económico.
f) Determine o nível de produção para o qual os custos totais nos dois períodos temporais são iguais. Qual é o significado económico deste nível de output?

Capítulo 23, A Oferta da Empresa

5.13. Considere a empresa do exercício 5.9.

a) Qual é o nível de produção que minimiza os custos médios variáveis?
b) Desenhe a sua oferta de curto prazo.

5.14. Uma empresa num mercado de concorrência perfeita tem a função de custo de curto prazo $c_s(y) = y^2 + 1$.

a) Determine a oferta de curto prazo desta empresa.
b) Determine o lucro máximo.

5.15. Num mercado de concorrência perfeita, uma empresa produz de acordo com a função de produção $f(l) = \min\{l^{1/2}, 10\}$, onde l representa a quantidade de trabalho. Se o preço do produto final é €1, qual é a função procura de trabalho?

5.16. Num mercado de concorrência perfeita, uma empresa produz de acordo com a função de produção $f(l, k) = 8l^{1/4}k^{1/2}$, onde l representa o número de horas de trabalho e k representa o número de unidades de capital. Admitindo que o salário é igual a €1 por hora e o preço de cada unidade de capital é €1, determine:

a) A função custo de longo prazo desta empresa
b) A função oferta de longo prazo da empresa.
c) O lucro máximo da empresa no longo prazo.

5.17. A função de produção da Júlia é $f(l, k) = [\min\{l, 3k\}]^{1/2}$, onde l representa o número de horas de trabalho e k representa o número de unidades de capital. Admitindo que o salário é igual a €3 por hora e o preço de cada unidade de capital é €9, determine:

a) A função oferta de longo prazo da empresa.
b) O lucro máximo da empresa no longo prazo.

5.18. Suponha que o custo de produzir milho depende da fertilidade da terra, de tal forma que a função custo de longo prazo é dada por $c(y, f) = (1 + y^2)/f$ para $y > 0$ e $c(0, f) = 0$, onde y representa o número de toneladas de milho produzidas.

a) Determine a função de custos médios de longo prazo para um nível de fertilidade f.
b) Qual é o nível de produção que minimiza os custos médios de longo prazo para um nível de fertilidade f?
c) Qual é o preço mais baixo a que pode ser vendida uma tonelada de milho de forma a cobrir os custos de produção?

Capítulo 24, A Oferta de Mercado

5.19. Considere um mercado onde operam 100 empresas que utilizam a mesma tecnologia. A função de produção de cada empresa é dada por $f(x_1, x_2) = (\min\{x_1, 4x_2\})^{1/2}$, onde x_1 e x_2 representam as quantidades de dois factores de produção variáveis, que custam €2 e €4 por unidade, respectivamente. Para além dos custos associados aos factores variáveis, cada empresa tem ainda custos fixos no valor de €20 no curto prazo.

a) Determine a função oferta de curto prazo de cada empresa.
b) Determine a função oferta de mercado de curto prazo.
c) Admitindo que a procura de mercado é $D(p) = 300 - 500p/6$, determine o preço de equilíbrio e o lucro de cada empresa no curto prazo.
d) Calcule o valor do excedente do produtor.

5.20. Considere uma indústria constituída por 1000 empresas que utilizam a função de produção $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$, onde x_1 e x_2 representam as quantidades de dois factores de produção que custam €1 por unidade. No longo prazo, ambos os factores são variáveis, mas no curto prazo cada empresa tem 100 unidades do factor 2.

a) Determine a função oferta de mercado de curto prazo.
b) Determine a função oferta de mercado de longo prazo.

5.21. Considere um mercado concorrencial onde todas as empresas utilizam a mesma tecnologia. A função custo de longo prazo de cada empresa é $c(y) = y^2 + 4$, se $y > 0$ e $c(0) = 0$. A função procura deste mercado é dada por $D(p) = 50 - p$, onde p representa o preço do produto final. Determine o número de empresas no equilíbrio de longo prazo.

Exercícios resolvidos

Nesta secção, não se faz referência explícita à matéria sobre a qual incidem os exercícios. Caberá ao aluno a tarefa de identificar os conceitos teóricos de que necessita.

Exercício R 5.1

No supermercado do Joaquim cada trabalhador ganha 6 €/hora e existem 10 caixas registadoras (i.e., capital) cujo custo de utilização foi estimado em 5 €/hora. A produção, medida em número de consumidores servidos, é dada pela função de produção seguinte:

$$f(l, k) = 0.5\, l^{3/4}\, k^2$$

Admitindo que o número de caixas registadoras não se altera, responda às seguintes questões:

a) De acordo com a informação fornecida, a decisão do Joaquim quanto ao número de empregados a contratar, é uma decisão de curto ou de longo prazo? Porquê?

b) Se o Joaquim quiser servir 400 clientes por hora, quantos empregados deverá ter? Qual será o custo correspondente? Interprete economicamente os resultados que obteve.

c) Derive a função de custo deste supermercado quando existem 10 caixas registadoras.

d) Derive as equações de custo marginal, custo médio, custo variável médio e custo fixo médio. Represente-as graficamente.

Resolução:

b) $0.5l^{3/4}(10)^2 = 400 \rightarrow l^{3/4} = 8 \rightarrow l = 16$

c) $l^{3/4} = y/50 \Leftrightarrow l(y) = (y/50)^{4/3}$. Logo, a função custo é $c(y) = 0.0326y^{4/3} + 50$.

d) $CMg(y) = dc(y)/dy = 0.0434y^{1/3}$

$CMe(y) = c(y)/y = 0.0326y^{1/3} + 50/y$

$CVMe(y) = c_v(y)/y = 0.0326y^{1/3}$

$CFMe(y) = CF/y = 50/y$

Exercício R5.2

Uma empresa usa trabalho, l e capital, k para produzir uma quantidade y. A função de produção é dada por $f(l, k) = l^{1/2}\, k^{3/4}$. Admita que o preço do trabalho é w = 2 e o do capital é r = 3.

a) Se a empresa quiser produzir 32 unidades que quantidades de factores deverá usar para minimizar o seu custo?

b) Determine as funções procura condicionadas dos factores. Qual é o significado económico destas funções?

c) Utilize os resultados obtidos em b) para determinar a combinação de factores de produção que a empresa vai usar para produzir y = 32.

d) Compare os resultados obtidos nas alíneas a) e c). O que conclui? Justifique teoricamente a sua resposta.

Resolução:

a) $\text{PMgl} = \frac{\partial f}{\partial L} = \frac{2}{4}\left(k^{3/4} l^{-1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(k^{3/4} l^{-1/2}\right)$ ou $\text{PMgl} = \frac{1}{2}\frac{y}{L}$

$$\text{PMgk} = \frac{\partial f}{\partial k} = \frac{3}{4}\left(k^{-1/4} l^{2/4}\right) = \frac{3}{4}\left(k^{-1/4} l^{1/2}\right) \text{ ou } \text{PMgk} = \frac{3}{4}\frac{y}{k}$$

$$\text{TST} = \frac{\text{PMgl}}{\text{PMgk}} = \frac{\frac{1}{2}\left(k^{3/4} l^{-1/2}\right)}{\frac{3}{4}\left(k^{-1/4} l^{1/2}\right)} = \frac{2}{3}\left(\frac{k}{l}\right)$$

Aplicando a condição de tangência:

$$k*, l*: \text{TST} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{k}{l}\right) = \frac{2}{3} \rightarrow k = l$$

Então para produzir 32 unidades de y tem-se:

$$32 = k^{5/4}\ (\text{ou } l^{5/4}) \Longrightarrow k(\text{ou } l) = 16.$$

b) As funções procura condicionadas dos factores são a solução do problema <u>genérico</u> de minimização de custos do produtor, ou seja:

$$\min_{L,K} wl + rk$$

Sujeito a $l^{1/2}k = y$

Pelas condições de 1ª ordem, temos:

$$\begin{cases} \text{TST} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{k}{l}\right) = \frac{w}{r} & (1) \\ l^{1/2}k^{3/4} = Y & (2) \end{cases}$$

Resolvendo a 1ª equação do sistema em ordem a k (por exemplo) obtém-se:

$$k = \frac{3}{2}\frac{w}{r}l \qquad (3)$$

Substituindo (3) na equação (2) do sistema e resolvendo para a única variável - l, obtém-se a f. procura condicionada de l (4):

$$l^{1/2}\left(\frac{3}{2}\frac{w}{r}l\right)^{3/4} = Y \rightarrow l = \frac{Y^{4/5}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{3/5}\left(\frac{w}{r}\right)^{3/5}} \qquad (4)$$

Função procura condicionada para L

Substituindo (4) em (3) e resolvendo para k obtém-se a f. procura condicionada para k (5):

$$k = \frac{3}{2}\frac{w}{r}\left[\frac{Y^{4/5}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{3/5}\left(\frac{w}{r}\right)^{3/5}}\right] \rightarrow k = \frac{Y^{4/5}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2/5}\left(\frac{w}{r}\right)^{-2/5}} \qquad (4)$$

Função procura condicionada para K

Exercício R5.3

A empresa XYZ é uma empresa de serviços que tem como função de produção f(L,M,K) = 20 $L^{1/4}M^{1/4}K^{1/2}$. S representa o número de unidades de serviço-tipo produzidas e os factores de produção são respetivamente o número de horas de trabalho qualificado (L), o número de horas de trabalho não qualificado (M) e as instalações e equipamentos (K).

a) Quantas horas de trabalho qualificado e não qualificado são necessárias para produzir de modo eficiente, no curto prazo, 400 unidades de serviços-tipo, considerando que a remuneração horária para o trabalho qualificado é de p_L = €8 e para o trabalho não qualificado de p_M = €2. A utilização de K, em termos de unidades físicas, tem um valor de 32 u.f.

b) Sabendo que no equilíbrio de longo prazo se deve ter: $\frac{PMgL}{p_L} = \frac{PMgM}{p_M} = \frac{PMgK}{p_K}$ e que, o preço da utilização de K é de €5, verifique se a empresa se encontra em equilíbrio de longo prazo. Comente o resultado, referindo qual deverá ser a estratégia da empresa.

Resolução:

a) Sendo K fixo, por estarmos no curto prazo, o problema do produtor consiste em determinar qual a quantidade de cada factor que deve adquirir tendo em conta duas restrições:

1. A restrição da tecnologia e escala de produção empregue, o que pressupõe não alterar a "dimensão" de K.

2. A restrição económica: deve gastar com a aquisição da última unidade de cada factor de produção exatamente o mesmo que lhe rende essa unidade, em termos do que ela produz.

A segunda restrição significa que se chamarmos PMgL ao produto físico realizado pela última unidade contratada do factor L, o seu rendimento, em termos de valor do produto produzido, deverá ser igual ao que custa ao produtor essa unidade de factor:

$$p. \text{PMgL} = P_L$$

(sendo p o preço do produto da empresa e P_L o preço do factor).
Este raciocínio vale para todos os factores de produção e, assim, deverá ter-se

$$\frac{1}{p} = \frac{PMgL}{p_L} = \frac{PMgM}{p_M} = \cdots = constante.$$

No curto prazo o produtor não pode fazer este raciocínio sobre K, apesar de ter de suportar os encargos resultantes da sua utilização. Isto é, havendo três factores de produção o seu custo total vem dado por: $p_L L + p_M M + p_K K.$
Note-se que o produtor não tem poder de decisão sobre os preços dos factores: nesse mercado ele é tomador de preço. E no curto prazo o que pode e tem de fazer é decidir quais são as <u>quantidades</u> de L e M que precisa adquirir de modo a que:

1) Atinja o seu objetivo de produção (S = 400 neste exercício) e
2) Minimize o gasto com a aquisição dos factores "variáveis".

Matematicamente isto corresponde a formalizar o seguinte problema:

$$\begin{aligned}&\underset{L,M}{Min}\; p_L L + p_M M + p_K K.\\ &s.a. \quad S = 20L^{1/4}M^{1/4}K^{1/2}\end{aligned}$$

Sendo de sublinhar que embora ele não possa alterar a parcela de despesa que tem com K, essa parcela faz parte do custo total e L e M são as únicas variáveis sobre as quais vai tomar decisões.

RESOLUÇÃO PELA LAGRANGEANA

$$\underset{L,M,\mu}{Min}\; \mathcal{L}(L,M,\mu) = p_L L + p_M M + p_K K + \mu\left(S - 20L^{1/4}M^{1/4}K^{1/2}\right)$$

$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = p_L - \mu\dfrac{S}{4L} = 0 \\ \\ 2)\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial M} = p_M - \mu\dfrac{S}{4M} = 0 \\ \\ 3)\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = S - L^{1/4}M^{1/4}K^{1/2} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\dfrac{\partial S}{\partial L} = \dfrac{1}{4}20L^{-\frac{3}{4}}M^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{2}} = \dfrac{20L^{\frac{1}{4}}M^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{2}}}{4L} \qquad \text{ou seja} \quad \dfrac{\partial S}{\partial L} = \dfrac{S}{4L}}$$

De 1) e 2) obtém-se

$$4)\ M = \frac{p_L}{p_M}L$$

e substituindo em 3) vem

$$S = 20\,L^{1/4}\left(\frac{p_L}{p_M}L\right)^{1/4}K^{1/2} \quad \Rightarrow S^2 = 20^2 L\left(\frac{p_L}{p_M}\right)^{\frac{1}{2}}K$$

E portanto

$$L = \frac{S^2}{400K}.\left(\frac{p_M}{p_L}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo nesta expressão os dados do enunciado, ($S = 400, K = 32$ e $p_L = 8$ e $p_M = 2$), obtém-se finalmente $L = 6{,}25\ e\ M = 25$ (tendo em conta a relação 4).

RESOLUÇÃO ALTERNATIVA PELA CONDIÇÃO DE TANGÊNCIA

Sabendo-se que $TST = \frac{PMgL}{PMgm} = \frac{P_L}{P_M}$ pode obter-se de forma mais expedita a relação entre as quantidades (unidades físicas) de L e de M a adquirir, substituindo depois a relação existente entre estas quantidades na função de produção, como antes se fez:

$$TST = \frac{\frac{S}{4L}}{\frac{S}{4M}} = \frac{M}{L} = \frac{P_L}{P_M} \Longrightarrow \qquad M = \frac{P_L}{P_M}.L$$

b) Saber se o valor de K com que a empresa está a trabalhar no curto prazo é um equilíbrio de longo prazo equivale a verificar se, para este factor também se verifica a relação que antes se testou para o factor variável, isto é:

$$5) \qquad \frac{1}{p} = \frac{PMgL}{p_L} = \frac{PMgM}{p_M} = \frac{PMgK}{p_K}$$

Como anteriormente se viu, a produtividade marginal de L (ou de M) pode-se apresentar como $\frac{\partial S}{\partial L} = \frac{S}{4L}\ \left(ou\ \frac{\partial S}{\partial M} = \frac{S}{4M}\ \right)$, valendo a pena destacar que isto significa, como diz a teoria, que ela depende não só do nível de produção como da quantidade do factor já usado (confira o significado de 'marginal').
Sendo conhecidos os resultados da alínea anterior obtém-se imediatamente os valores das produtividades, respetivamente:

$$PMgL = \frac{S}{4L} = \frac{400}{4 * 6{,}25} = 16 \quad e \quad PMgM = \frac{S}{4M} = \frac{400}{4 * 25} = 4$$

Ao maior preço do trabalho qualificado corresponde uma produtividade mais elevada que, no entanto, respeita a condição inicial antes explicitada, isto é:

$$\frac{PMgL}{p_L} = \frac{16}{8} = 2 \quad e\ por\ sua\ vez\ \frac{PMgM}{p_M} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

Assim a condição 5) implica que também se tenha $\frac{PMgK}{p_K} = 2$ ou, tendo em conta a forma anterior de calcular a produtividade marginal e os valores (dados) de K e do seu preço,

$$6) \qquad \frac{PMgK}{p_K} = \frac{\frac{S}{2K}}{p_K} = \frac{400}{2 * 32 * 50} = 0{,}125$$

o que significa que a condição de equilíbrio de longo prazo não é respeitada. Como poderemos interpretar este resultado ou qual deverá então ser a estratégia da empresa?

Responder a esta pergunta equivale a calcular qual deveria ser a quantidade a usar de K tendo presente que são conhecidos quer a sua produtividade (ao nível predefinido de produção) quer o seu preço.
A produtividade de K, $PMgK = \frac{S}{2K} = \frac{400}{2*32} = 6{,}25$, está claramente abaixo da produtividade do trabalho qualificado e no entanto, por unidade física do seu uso, o respetivo preço é muito superior. Tendo presente que no mercado dos factores a empresa, por definição é tomadora de preço, isto revela que o preço relativo do trabalho (qualificado e não qualificado) é muito baixo. Ou dito de outro modo a empresa está a usar uma tecnologia que não tem em conta o preço relativo dos factores: não faz sentido económico usar máquinas que ficam mais caras do que o trabalho que elas vão substituir (Lembrar que a função de produção é de factores substituíveis!).
Que tecnologia deveria a empresa adotar?
Admitindo que os preços se mantinham, isso corresponde a resolver em ordem a K a equação 6) no pressuposto que o rácio Produtividade Marginal / Preço era o mesmo do dos outros factores.

$$6') \qquad \frac{PMgK}{p_K} = \frac{\frac{S}{2K}}{p_K} = \frac{400}{2 * K * 50} = 2 \quad \Rightarrow \qquad K = 2$$

Este resultado mostra, essencialmente, que dada uma determinada função de produção, que exprime as restrições de natureza tecnológica, é a proporção no preço dos factores que determina se uma combinação específica desses factores é a mais económica. Isto é, determina se a tecnologia que conduziu às proporções inicialmente encontradas (na lógica do curto prazo) é economicamente ótima.
Acabamos de ver que neste caso não é: aos preços vigentes a combinação de factores deveria ser feita na proporção de L=6,25, M=25 e K=2. Mas se substituirmos estes valores na função de produção verificamos

que o nível de produção conseguido com estas quantidades de inputs é de apenas 100. Quer isto dizer que precisaríamos de multiplicar por 4 a quantidade produzida.
Verificando que a função é homogénea de grau 1, facilmente concluímos que é por esse mesmo factor que precisamos multiplicar a quantidade a adquirir de cada um dos factores. Então o equilíbrio de "longo prazo" para estes preços será dado por L=25, M=100 e K=8. Até que ponto esta "tecnologia" é mais económica do que a inicialmente disponível?
Calculando os custos correspondentes vem,

$$CT_{INICIAL} = p_L L + p_M M + p_K K = 6{,}25 * 8 + 25 * 2 + 50 * 32 = 1700.$$

$$CT_{OPTIMIZADO} = p_L L + p_M M + p_K K = 25 * 8 + 100 * 2 + 50 * 8 = 800\ .$$

Exercício R5.4

A empresa GESI produz um dado produto na quantidade y e utiliza como factores de produção trabalho ou capital. Cada unidade de k proporciona 4 unidades de output enquanto cada unidade de l proporciona 2 unidades de output. Os factores trabalho e capital são adquiridos em mercados perfeitamente competitivos aos preços de, respetivamente, w = 4 e r = 4.

a) Escreva a expressão genérica da função de produção da empresa, justificando o seu raciocínio. Com base nesta caracterização da tecnologia da empresa, que combinação de inputs irá a empresa utilizar se pretender minimizar os custos de produção?
b) Determine as funções de procura dos factores como função da quantidade produzida.
c) Obtenha as funções de custo total, custo médio e custo marginal da empresa.

Resolução

a) k e l são substitutos perfeitos na produção. Para produzir uma unidade de produto y, a empresa utiliza ou k ou uma combinação de ambos. Então, se a empresa dispuser de uma determinada quantidade k de factor capital e de uma determinada quantidade l de factor trabalho, a empresa pode produzir determinada quantidade de output de acordo com a seguinte tecnologia: f(k,l) = 4k + 2l. Pela função de produção, os inputs k e l são substitutos perfeitos entre si → a função de produção é do tipo aditivo e a TST é constante. A empresa irá usar a combinação de inputs que lhe minimiza o custo de produção. Como os preços de k e de l são iguais, e sabendo que uma unidade de capital produz o dobro de uma unidade de trabalho, então a empresa irá usar apenas factor capital.
b) Como vimos, dados os preços dos inputs e a restrição tecnológica, a empresa, somente utiliza o factor capital na produção pelo que só há uma única função procura de factores. Assim: l(y) = 0 e, como y = 4k, temos k(y) =y/4.
c) c(y) = r k(y) + w l(y) = 4*0 +4*y/4 = y; CMe(y) = CMg(y) = 1.

Exercício R5.5

Suponha que existem 80 empresas num mercado de concorrência perfeita em que a empresa representativa tem a função de custo $c(q) = 100 + 4\ q^2$ sendo a procura de mercado D(p) = 1280 – 30p.

a) Obtenha o preço e a quantidade de equilíbrio no mercado.
b) Determine o lucro da empresa.
c) Deverá a empresa continuar a produzir no curto prazo? Haverá equilíbrio neste mercado, no longo prazo? Justifique.

Resolução

a. O equilíbrio de mercado obtém-se quando a quantidade procurada pelos consumidores é igual à quantidade oferecida pelas empresas. Como a curva da procura já está explicitada no enunciado, falta obter a curva da oferta.
A curva da oferta de mercado obtém-se agregando as curvas da oferta individuais das empresas de modo a que a quantidade oferecida no mercado corresponda à soma das quantidades produzidas. Assim, $S(p) = \Sigma q^s_i$.
Como, por hipótese, as empresas maximizam o lucro, as quantidades que produzem correspondem à igualdade entre o preço e o custo marginal. Então, pode deduzir-se a curva da oferta individual de cada empresa (da empresa representativa uma vez que adoptam todas a mesma tecnologia) invertendo a curva do custo marginal e igualando este custo ao preço. Assim, CMg(q) = 8q => p = 8q ⇔ q^S_i =p/8. Como existem

80 empresas no mercado, S(p) = 80p/8 = 10p. Igualando as quantidades procuradas e oferecidas, vem: 1280 – 30p = 10p ⇔ p = 32; e Q = 10*32 = 320.

b. O lucro é calculado para cada empresa. Formalmente, vem: π = (Receita Média – Custo Médio) x q^S_i. Como o mercado é concorrencial, Receita Média = Receita Marginal = p = 32. Por sua vez, Custo Médio =c(q)/q = 100/q + 4q. Como o lucro é calculado para cada empresa, temos que q = q^S_i. Assim, temos que achar primeiro a quantidade que cada empresa oferece. Como existem 80 empresas, q^S_i = S(p)/80 = 4 e, portanto, CMe= 41.
Portanto, temos π = (32 – 41) x 4 = -36.

c. No curto prazo a empresa tem lucro negativo. Mas como |π| < FC, a empresa sofrerá um prejuízo maior se encerrar a sua actividade.

Exercício R5.6

A empresa Quartz vende num mercado concorrencial e tem a seguinte função de lucro: π(q) = pq – 2q³ + 20q² - 80q -10.

a) Determine a função oferta de curto prazo da empresa.
b) Determine e represente graficamente o ponto de encerramento da empresa. Indique, no gráfico, o limiar de rentabilidade da empresa e explique o seu significado.
c) A procura do mercado da empresa é D(p)=1000 – 10p. Sabendo que existem 20 empresas no mercado todas iguais, calcule o preço de equilíbrio.

Resolução:

a) $c(q) = 2q^3 - 20q^2 + 80\text{q} + 10;$

$$\boldsymbol{q_i^S : \begin{cases} p = CMg(q) \\ p \geq minCVMe \end{cases}}$$

$$\text{p} = 6\text{q}^2 - 40\text{q} + 80 \ \rightarrow \text{q}_i^S = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4*6*(80-p)}}{2\times 6} \rightarrow \text{q}_i^S = \frac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12}$$

$$CVMe(q) = 2q^2 - 20q + 80 \ \rightarrow \min CVMe : \frac{dCVMe(q)}{dq} = 0 \ \rightarrow q = 5$$

Assim, q=5 é a produção da empresa com o mais baixo custo variável médio. Logo, o custo variável médio mínimo da empresa é €30. Portanto, a empresa só começará a produzir no curto prazo quando o preço de mercado for maior ou igual a €30. A curva de oferta da empresa no curto prazo é então igual a:

$$\boldsymbol{q_i^S} = \begin{cases} \dfrac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12} & p \geq 30 \\ 0 & p < 30 \end{cases}$$

b) O ponto ou limiar de encerramento é p < 30. O limiar de rentabilidade corresponde ao preço de mercado que anula o lucro da empresa. Este preço é igual ao valor mais baixo do custo total médio de produção; no gráfico, o valor mínimo do custo total médio corresponde ao ponto dei intersecção das funções de custo marginal e de custo total médio.

c) Cada uma das 20 empresas do mercado tem a seguinte curva de oferta:

$$\boldsymbol{q_i^S} = \begin{cases} \dfrac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12} & p \geq 30 \\ 0 & p < 30 \end{cases}$$

Então a curva de oferta de mercado S(p) é igual à soma horizontal das curvas de oferta de cada uma das 20 empresas, ou seja:

$$\text{S(p)} = \begin{cases} 20 \times \dfrac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12} & p \geq 30 \\ 0 & p < 30 \end{cases}$$

Quando o mercado estiver em equilíbrio:

$$S(p) = D(p) \to 20 \times \frac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12} = \quad 1000 - 10p \ \to \ \frac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12} \ = 50 - 0{,}5p$$

$$\to 24p - 320 = (560 - 6p)^2 \to p = \frac{6744 \mp \sqrt{6744^2 - 4 \times 36 \times 313920}}{2 \times 36} \to p *$$

$$= 86{,}36 \ \to Q *= 136{,}44$$

Soluções dos exercícios propostos

5.1.

a) A procura condicionada de trabalho é dada por $l(y) = (y^2/16)*(r/w)^{1/2}$. A procura condicionada de capital é $k(y) = (y^2/16)*(w/r)^{1/2}$. Estas funções dão as quantidades de factores que conduzem ao mínimo dos custos de produção sujeito à restrição de produzir uma quantidade de produto final y.

b) A função custo é dada por $c(y) = y^2(rw)^{1/2}/8$.

c) A constante 4 (quatro) representa a escala de produção, isto é, o número de unidades de produto final que são obtidas quando se utiliza 1 unidade de cada factor produtivo.

5.2.

a) Resolvendo o problema de minimização de custos, obtém-se $l(y) = (y/A)^{3/2}*(3r/w)^{1/4}$ e $k(y) = (y/A)^{3/2}*(w/3r)^{3/4}$.

b) $A = 0{,}1^{2/3}$. A constante A representa a escala de produção, o número de unidades produzidas quando se utilizam 1 unidade de trabalho e 1 unidade de capital.

5.3

a) O produto marginal de l é decrescente em l, logo o trabalho apresenta rendimentos decrescentes. A função de produção exibe rendimentos crescentes à escala.

b) $l(y) = y^2/8$ e $c^s(y) = y^2/4 + 100$. A quantidade produzida que minimiza o custo médio é 20 e a que minimiza o custo variável médio é 0.

c) Forma em U.

d) $l(y) = y^{4/5}(2w_k/3w_l)^{3/5}$, $k(y) = y^{4/5}(3w_l/2w_k)^{2/5}$ e $c(y) = y^{4/5}\, w_l^{2/5}\, w_k^{3/5}[(2/3)^{3/5}+(3/2)]^{2/5}$

e) A curva de custo médio de longo prazo é sempre decrescente, tocando na curva de custo médio de curto prazo para apenas o valor y = 16,33. (Este valor pode ser encontrado fazendo $k(y) = 4 \Leftrightarrow y^{4/5}(3w_l/2w_k)^{2/5} = 4$ e resolvendo para y.) Para todos os outros valores de y, a curva de custo médio de curto prazo está acima da de longo prazo.

5.4.

a) No óptimo temos $2l = 3k = y$; logo, $l(y) = y/2$ e $k(y) = y/3$ e $c(y) = y(w/2 + r/3)$.

b) No óptimo temos $l(y) = y/2$ e $k(y) = 0$ se $w/2 < r/3$; $l(y) = 0$ e $k(y) = y/3$ se $w/2 > r/3$; e $l(y) = c$ e $k(y) = (y - 2c)/30$, com $0 \le c \le y/2$, se $w/2 = r/3$. Logo, $c(y) = \min\{wy/2, ry/3\}$.

c) No óptimo temos $l(y) = y/2$ e $k(y) = 0$ se $w/2 \le r/3$; $l(y) = 0$ e $k(y) = y/3$ se $w/2 \ge r/3$; e $l(y) = c$. Logo, $c(y) = \min\{wy/2, ry/3\}$.

5.6.

a) Resolvendo o problema de minimização de custos, obtém-se
$l(y) = y^{1/\alpha+\beta}\,(\alpha r/\beta w)^{\beta/\alpha+\beta}$ e $k(y) = y^{1/\alpha+\beta}(\beta w/\alpha r)^{\alpha/\alpha+\beta}$.
Logo, $c(y) = y^{1/\alpha+\beta} w^{\alpha/\alpha+\beta} r^{\beta/\alpha+\beta}[(\beta/\alpha)^{\alpha/\alpha+\beta} + (\alpha/\beta)^{\beta/\alpha+\beta}]$ e
$CMe(y) = c(y)/y = y^{(1-\alpha-\beta)/\alpha+\beta} w^{\alpha/\alpha+\beta} r^{\beta/\alpha+\beta}[(\beta/\alpha)^{\alpha/\alpha+\beta} + (\alpha/\beta)^{\beta/\alpha+\beta}]$.

b) V.

5.7

a) V

b) V

c) V

5.8 Uma adega cooperativa encontra no mercado apenas duas linhas de engarrafamento de vinho: a pequena e a grande. Se instalar a pequena, a sua curva de custos totais será:

$$c_p(y) = y^3 - 10y^2 + 35y$$

e, se instalar a grande, a sua curva de custos totais será:

$$c_g(y) = y^3 - 20y^2 + 108y$$

onde y é a quantidade de vinho engarrafada.

a) Uma vez que $c_p(y) > c_g(y)$ se e só se $y > 7{,}3$, temos $c(y) = c_p(y)$ se $y \le 7{,}3$ e $c(y) = c_g(y)$ se $y \ge 7{,}3$. O custo médio de curto prazo com a linha de engarrafamento pequena é $CMe_p(y) = y^2 - 10y + 35$. O custo médio de curto prazo com a linha de engarrafamento grande é $CMe_g(y) = y^2 - 20y + 108$. O custo total médio de longo prazo é a curva envelope dos custos de curto prazo, isto é, $CMe_l(y) = y^2 - 10y + 35$ para $y \le 7{,}3$ e $CMe_l(y) = y^2 - 20y + 108$ para $y \ge 7{,}3$.

b) Os rendimentos à escala desta adega cooperativa são crescentes para $y < 5$ e $7{,}3 < y < 10$ e são decrescentes para $5 < y < 7{,}3$ e $y > 10$.

5.9

a) $c_v(y) = y^3 - 2y^2 + 5y$.

b) $CMg(y) = 3y^2 - 4y + 5$.

5.10

a) Curto prazo: $k=2 \Rightarrow l(y) = 0{,}5y^2$; $c_s(y) = 2y^2+2$. Longo prazo: $k(y)=2y$; $l(y)=0{,}5y$; $c(y)=4y$.

b) Curto prazo: $l(y) = 0{,}5y - 4$; $c_S(y) = 2y - 6$. Longo prazo: $l = 0$; $k(y) = y/4$; $c(y) = 5y/4$.

c) Curto prazo: no curto prazo a empresa tem 9 unidades de capital que limitam a produção (18 é o nível de produção máximo); por outro lado, suporta um custo fixo de 8*9 = 72 e, para além disso, tem custos variáveis associados ao factor l; assim, temos $c_S(y) = 72 + 4y$ (com $y \leq 18$). Longo prazo: no longo prazo os dois factores são variáveis e a proporção que minimiza o custo é tal 2k = 3l; assim, vem l(y) = y/3, k(y) = y/2 e c(y) = 8y.

5.11

c) y = 3.

5.12

a) As quantidades de factores que minimizam o custo de produção são l= 33,3(3) e k= 75; c(100)= 600.
b) As quantidades de factores a usar com um custo total de 504 são l=28 e k = 63. O output que será produzido com a este custo e com esta quantidade de factores é y = 84.
c) As combinações de factores que minimizam a produção de qualquer output y para os preços dados são: l=y/3 e y=9/12y. Então a função de custo total de longo prazo de produzir qualquer output para os preços dos factores que foram dados é c(y) = 6y.
d) Uma vez que a função produção exibe sempre rendimentos constantes à escala, o custo médio será constante, pelo que o custo marginal também e o custo total crescerá a um ritmo constante.
e) $c_s(y)=(9y)^2 / 256 + 256$.
f) O nível de produção para o qual os custos de produção totais de curto e longo prazos são iguais, é aquele para o qual se verifica a igualdade dos custos médios de produção em ambos os períodos. Logo o nível de produção pretendido é y=85,3(3).

5.13

a) $CMe_v(y) = y^2 - 2y + 5$. Calculando a derivada dos CMe variáveis em ordem a y e igualando a zero, vem y = 1.
b) A oferta de curto prazo da empresa é dada por $p = 3y^2 - 4y + 5$ para $p \geq 4$ e $y = 0$ para $p \leq 4$.

5.14

a) S(p) = y = p/2.
b) $\prod(p) = p^2/4 - 1$.
c) Excedente do produtor = $p^2/4$

5.15 A procura de trabalho é $(1/2\ w_l)^2$ se $w_l \geq 0{,}05$ e é 100 se $w_l \leq 0{,}05$.

5.16

a) $c(y) = 3y^{4/3}/(2^{14/3})$.
b) $S(p) = y = 2^8p^3$.
c) $\prod(p) = p(2^8p^3) - 3(2^8p^3)^{4/3}/(2^{14/3})$
$= 2^8p^4 - 3p^4 2^{8\times4/3-14/3} = 2^6p^4$.

5.17

a) Resolvendo o problema de maximização do lucro da empresa obtemos $y^* = p/\ 2(w_l + w_k/3)$; dados os preços dos factores, vem S(p) = p/12.

O valor máximo do lucro é dado por $\prod(p) = py^* - w_l y^{*2} - w_k y^{*2}/3$ com $y^* = p/2(w_l + w_k/3)$; assim, o valor máximo do lucro é $\prod(p) = p^2/24$.

5.18

a) CMe(y) = 1/(fy) + y/f.

b) y = 1.

c) Uma vez que CMe(1) = 2/f, o preço é 2/f.

5.19

a) Uma vez que $c_S(y) = 3y^2$, temos CMe(y) = 3y, função que atinge o mínimo de 0 para y = 0. Logo, a quantidade oferecida por cada empresa é tal p = CMg(y*) para todo o $p \geq 0$, isto é y* = p/6 para todo o $p \geq 0$.
b) S(p) = 100p/6.
c) p* = 3. $\prod(p^*)$ = 3*0,5 - 3*0,5*0,5 - 20 = 0,75 - 20 = - 19,25.
d) Excedente do produtor = - 19,25 + 20 = 0,75.

5.20

a) No curto prazo, se resolvermos o problema de minimização do custo de uma empresa, obtemos $c_S(y) = 100 + y^2/100$;. Logo, CMg(y) = 2y/100 e $CMe_v(y) = y/100$. Uma vez que o valor mínimo dos custos variáveis médios é 0 (correspondendo a y = 0), a oferta de curto prazo de cada empresa é dada por p = CMg(y*), isto é, y* = 50p para todo o $p \geq 0$. Assim, a oferta de mercado de curto prazo é S(p) = 50 000p.
b) No longo prazo, resolvendo o problema de minimização do custo, obtém-se uma função custo c(y) = 2y. Logo CMe(y) = 2. Assim, a curva de oferta de mercado é uma curva horizontal ao nível €2, o que implica que o mercado está disposto a oferecer um número infinito de unidades se o preço for superior a €2 e 0 unidades se o preço for inferior a €2.

5.21 Num equilíbrio de longo prazo, o lucro de cada empresa é 0, isto é, $p^*y^* - y^{*2} - 4 = 0$ e cada empresa produz y^* tal que $p^* = CMg(y^*)$, isto é, $p = 2y^*$. Resolvendo este sistema de duas equações obtemos $y^* = 2$ e $p^* = 4$. Uma vez que $D(p^*) = S(p^*)$ em equilíbrio e que $D(p^*) = 46$, temos $S(p^*) = 46 = 2N$, onde N representa o número de empresas em equilíbrio. Assim, temos $N = 23$.